



Équations différentielles/Géométrie différentielle

## Surfaces de Bonnet et équations de Painlevé

*Bonnet surfaces and Painlevé equations*Robert Conte<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Centre de mathématiques et de leurs applications, École normale supérieure de Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay, 61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan cedex, France

<sup>b</sup> Department of Mathematics, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong

## I N F O A R T I C L E

## Historique de l'article :

Reçu le 16 avril 2016

Accepté le 18 octobre 2016

Disponible sur Internet le 21 novembre 2016

Présenté par Philippe G. Ciarlet

## R É S U M É

Nous montrons que les équations du repère mobile des surfaces de Bonnet conduisent à une paire de Lax matricielle isomonodromique d'ordre deux pour la sixième équation de Painlevé.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

## A B S T R A C T

We show that the moving frame equations of Bonnet surfaces can be extrapolated to a second order, isomonodromic matrix Lax pair of the sixth Painlevé equation.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

## Abridged English version

In 1867, the geometer Pierre-Ossian Bonnet stated and solved the following problem: to determine all surfaces in  $\mathbb{R}^3$  that can be mapped onto a given surface while conserving the principal radii of curvature. Among the numerous solutions, one important class, known as *Bonnet surfaces*, depends on six arbitrary constants and is characterized by the differential equation (1) [2, §11 p. 84, Eq. (52)] for the mean curvature  $H$ . Since this equation is solved [1] by the Hamiltonian of a particular sixth equation  $P_{VI}$  of Painlevé, the moving frame equations define a linear representation of this Hamiltonian. In this Note, we remove the restriction (4), express the moving frame equations with  $P_{VI}$  instead of its Hamiltonian, and finally normalize the result according to the prescription of Schlesinger. Our final result is an isomonodromic matrix Lax pair of  $P_{VI}$ , either very symmetric but restricted to  $\theta_\infty \neq 0$ , see (16), or polynomial in the four  $\theta_j$ 's but less nice-looking, see (14).

## 1. Rappels sur les surfaces de Bonnet

Parmi les surfaces de  $\mathbb{R}^3$  applicables sur une surface donnée avec conservation des courbures principales, il existe une classe remarquable, dépendant de six constantes arbitraires et connue sous le nom de *surfaces de Bonnet*, qui est caractérisée

Adresse e-mail : [Robert.Conte@cea.fr](mailto:Robert.Conte@cea.fr).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.019>

1631-073X/© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

par l'équation différentielle [2, §11 p. 84, Eq. (52)]

$$\frac{1}{2}(\log H)'' - \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha \xi}\right)^2 \frac{H' + H^2}{H'} + H' = 0, \tag{1}$$

où  $\xi$  désigne une certaine fonction des coordonnées conformes  $z, \bar{z}$ ,  $H(\xi)$  la courbure moyenne et  $\alpha$  une constante éventuellement nulle.

Ce n'est que cent trente ans plus tard [1] que, pour  $\alpha$  non nul, sa solution  $H$  sera reconnue égale à l'hamiltonien  $H_{VI}$  [13, Eq. (3)], [3, t page 341], [11],

$$\begin{aligned} H_{VI} &= \frac{x(x-1)u'^2}{4u(u-1)(u-x)} \\ &+ \frac{1}{4x(x-1)} \left[ \theta_\infty^2 \left(\frac{1}{2} - u\right) + \theta_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{u}\right) \right. \\ &\quad \left. + \theta_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{u-1}\right) + (\theta_x - 1)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x(x-1)}{u-x} - x\right) \right], \end{aligned} \tag{2}$$

de la sixième fonction de Painlevé  $P_{VI}$ , définie par

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x} \right] u'^2 - \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x} \right] u' \\ &+ \frac{u(u-1)(u-x)}{2x^2(x-1)^2} \left[ \theta_\infty^2 - \theta_0^2 \frac{x}{u^2} + \theta_1^2 \frac{x-1}{(u-1)^2} + (1 - \theta_x^2) \frac{x(x-1)}{(u-x)^2} \right], \end{aligned} \tag{3}$$

avec toutefois trois contraintes entre les quatre paramètres  $\theta_j$ ,

$$\theta_\infty = 0, \theta_0^2 = \theta_1^2, \theta_x^2 = 1. \tag{4}$$

La considération des variétés riemanniennes  $\mathbb{R}^3(c)$ , que nous adoptons désormais en lieu et place de  $\mathbb{R}^3$ , permet d'introduire un paramètre supplémentaire  $c$  [15] dans les équations du repère mobile et donc de relâcher une contrainte, puisque  $\theta_0^2 - \theta_1^2 = 4c$ ,

$$d\sigma = (\mathbb{U}dz + \mathbb{V}d\bar{z})\sigma, \tag{5}$$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} (1/4)U_z & -Qe^{-U/2} \\ (1/2)(H+c)e^{U/2} & -(1/4)U_z \end{pmatrix}, \mathbb{V} = \begin{pmatrix} -(1/4)U_{\bar{z}} & -(1/2)(H-c)e^{U/2} \\ \bar{Q}e^{-U/2} & (1/4)U_{\bar{z}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où  $e^U, H, Q, \bar{Q}$  sont les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales

$$I = \langle d\mathbf{F}, d\mathbf{F} \rangle = e^U dz d\bar{z}, \tag{7}$$

$$II = -\langle d\mathbf{F}, d\mathbf{N} \rangle = Q dz^2 + e^U H dz d\bar{z} + \bar{Q} d\bar{z}^2. \tag{8}$$

## 2. Représentation linéaire de $H_{VI}$ et de $P_{VI}$

Après une transformation conforme, les valeurs de Bonnet [2, §11]

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1 - e^{4c_z(z+\bar{z})}}, \\ e^U = -\frac{32c_z c_q}{c_h} \frac{dx}{dH}, H = \frac{2c_h c_z}{c_q} Y, Y = x(x-1)H_{VI}, \\ Q = \frac{4c_q}{c_h} \frac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))} \frac{\sinh(2c_z\bar{z})}{\sinh(2c_z z)}, \bar{Q} = \frac{4c_q}{c_h} \frac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))} \frac{\sinh(2c_z\bar{z})}{\sinh(2c_z\bar{z})}, \end{cases} \tag{9}$$

où les constantes complexes non nulles  $c_q, c_z, c_h$  permettent de couvrir les conventions des divers auteurs [5], définissant ainsi une représentation linéaire de  $H_{VI}$  par des matrices d'ordre deux de trace nulle,

$$\begin{aligned} \mathbb{U}dz + \mathbb{V}d\bar{z} &= x(x-1) \frac{Y''}{Y'} (c_z d\bar{z} - c_z dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \sqrt{Y'} \begin{pmatrix} 0 & -S_1 dz - \frac{Y - (\theta_0^2 + \theta_1^2)/8}{Y'} 4c_z d\bar{z} \\ S_2 d\bar{z} + \frac{Y + (\theta_0^2 + \theta_1^2)/8}{Y'} 4c_z dz & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))} \frac{\sinh(2c_z\bar{z})}{\sinh(2c_zz)}, S_2 = \frac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))} \frac{\sinh(2c_zz)}{\sinh(2c_z\bar{z})}. \quad (10)$$

Il existe alors [1] un changement de variables  $(z, \bar{z}) \rightarrow (x, t)$

$$x = \frac{1}{1 - e^{4c_z(z+\bar{z})}}, t = \frac{1}{1 - e^{4c_zz}}, \quad \mathbb{U}dz + \mathbb{V}d\bar{z} = Ldx + Mdt, \quad (11)$$

rendant les nouvelles matrices  $L, M$  du repère mobile rationnelles en  $x$  et  $t$ ,

$$L = -\frac{M_x}{t-x} + L_\infty, M = \frac{M_0}{t} + \frac{M_1}{t-1} + \frac{M_x}{t-x}, M_\infty = -M_0 - M_1 - M_x. \quad (12)$$

Les quatre singularités  $t = \infty, 0, 1, x$  sont du type de Fuchs,  $L_\infty$ , et les résidus  $M_j$  ne dépendent que de  $x, Y, Y', Y'', \theta_j$ . C'est précisément [14] une paire de Lax matricielle isomonodromique de  $H_{VI}$ .

La transformation birationnelle [13, Eq. (3)], [12, Table R] entre  $P_{VI}$  et son Hamiltonien permet ensuite de la convertir en une paire de Lax de  $P_{VI}$ . Après le changement de base défini par la matrice de passage

$$P_1 = \text{diag}(Y'^{1/4}, Y'^{-1/4}), \quad (13)$$

les matrices  $L$  et  $M$  sont rationnelles en toutes les variables et polynomiales en  $u', \theta_0, \theta_1$ . Il est alors facile, en exigeant seulement la conservation du degré des  $M_j$  et de  $L_\infty$  en  $u'$ , de lever les restrictions (4) – lire les détails dans un article en cours de rédaction.

Valable pour des  $\theta_j$  quelconques, cette première forme canonique de la paire de Lax,

$$\left\{ \begin{array}{l} L = -\frac{u-x}{x(x-1)}M_\infty - \frac{M_x}{t-x}, M = \frac{M_0}{t} + \frac{M_1}{t-1} + \frac{M_x}{t-x}, \\ M_\infty + M_0 + M_1 + M_x = 0, \\ M_\infty = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a & -4 \\ a^2 - \theta_\infty^2 & -2a \end{pmatrix}, \\ M_0 = -\frac{1}{2(u-x)} \begin{pmatrix} e_0 & -2u(u-x) \\ e_0^2 - \theta_0^2(u-x)^2 & -e_0 \end{pmatrix}, \\ M_1 = \frac{1}{2(u-x)} \begin{pmatrix} e_1 & -2(u-1)(u-x) \\ e_1^2 - \theta_1^2(u-x)^2 & -e_1 \end{pmatrix}, \\ M_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Theta_x & 0 \\ 2M_{x,21} & \Theta_x \end{pmatrix}, \\ M_{x,21} = -\frac{e^2 - (u-x)^2((\theta_\infty^2 + \Theta_x^2 - 2a\Theta_x)u(u-1) - \theta_0^2(u-1) + \theta_1^2u)}{4u(u-1)(u-x)^2}, \\ e = x(x-1)u' + \Theta_x u(u-1), \Theta_x^2 = (\theta_x - 1)^2, \\ e_0 = e - (\Theta_x - a)u(u-x), \\ e_1 = e - (\Theta_x - a)(u-1)(u-x), \\ -4 \det M_j = \theta_j^2, j = \infty, 0, 1; -4 \det M_x = \Theta_x^2, \end{array} \right. \quad (14)$$

dépend d'une constante arbitraire  $a$ , qu'il est loisible de choisir égale à  $\Theta_x$  ou à  $\pm\theta_\infty$ .

Comme l'a montré Schlesinger [14, p. 105], le résidu  $M_\infty$  est constant et, s'il est inversible, il existe un changement de base permettant d'annuler le terme  $L_\infty$  dans (12) et donc de définir la paire de Lax de manière unique. Défini par la matrice de passage  $P_2P_3$ ,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a - \theta_\infty & a + \theta_\infty \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} g^{-1/2} & 0 \\ 0 & g^{1/2} \end{pmatrix}, \frac{g'}{g} = \theta_\infty \frac{u-x}{x(x-1)}, \quad (15)$$

il conduit pour  $\theta_\infty$  non nul à la deuxième forme canonique, particulièrement élégante,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \theta_\infty \neq 0 : L = -\frac{M_x}{t-x}, M = \frac{M_0}{t} + \frac{M_1}{t-1} + \frac{M_x}{t-x}, \Theta_x^2 = (\theta_x - 1)^2, \\
 M_\infty + M_0 + M_1 + M_x = 0, \\
 M_\infty = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_\infty & 0 \\ 0 & -\theta_\infty \end{pmatrix}, \\
 M_{0,11} = \frac{u-1}{N} \left[ (e - \Theta_x u(u-x))^2 - (u-x)^2 (\theta_0^2 + \theta_\infty^2 u^2) \right], \\
 M_{0,12} = \frac{u-1}{N} \left[ (e - (\Theta_x + \theta_\infty) u(u-x))^2 - (u-x)^2 \theta_0^2 \right] g, \\
 M_{0,21} = -\frac{u-1}{N} \left[ (e - (\Theta_x - \theta_\infty) u(u-x))^2 - (u-x)^2 \theta_0^2 \right] g^{-1}, \\
 M_{1,11} = -\frac{u}{N} \left[ (e - \Theta_x (u-1)(u-x))^2 - (u-x)^2 (\theta_1^2 + \theta_\infty^2 (u-1)^2) \right], \\
 M_{1,12} = -\frac{u}{N} \left[ (e - (\Theta_x + \theta_\infty) (u-1)(u-x))^2 - (u-x)^2 \theta_1^2 \right] g, \\
 M_{1,21} = \frac{u}{N} \left[ (e - (\Theta_x - \theta_\infty) (u-1)(u-x))^2 - (u-x)^2 \theta_1^2 \right] g^{-1}, \\
 M_{x,11} = \frac{1}{N} \left[ e^2 - (u-x)^2 \left[ (\theta_\infty^2 + \Theta_x^2) u(u-1) - \theta_0^2 (u-1) + \theta_1^2 u \right] \right], \\
 M_{x,12} = \frac{1}{N} \left[ e^2 - (u-x)^2 \left[ (\Theta_x + \theta_\infty)^2 u(u-1) - \theta_0^2 (u-1) + \theta_1^2 u \right] \right] g, \\
 M_{x,21} = -\frac{1}{N} \left[ e^2 - (u-x)^2 \left[ (\Theta_x - \theta_\infty)^2 u(u-1) - \theta_0^2 (u-1) + \theta_1^2 u \right] \right] g^{-1}, \\
 -4 \det M_j = \theta_j^2, \quad j = \infty, 0, 1; \quad -4 \det M_x = \Theta_x^2,
 \end{array} \right. \tag{16}$$

avec les notations

$$\frac{g'}{g} = \theta_\infty \frac{u-x}{x(x-1)}, \quad e = x(x-1)u' + \Theta_x u(u-1), \quad N = 4\theta_\infty u(u-1)(u-x)^2. \tag{17}$$

Ce résultat, qui clôt nos précédentes recherches [9,4], est beaucoup plus simple et symétrique que celui de Jimbo et Miwa [8, Eq. (C.47)], [10], lire une comparaison détaillée dans [9] et dans [6, p. 211]. L'avantage décisif que procure l'origine géométrique de la représentation linéaire est l'inutilité de devoir supposer une représentation des quatre résidus respectant la constance de leur déterminant.

La structure de  $P_{VI}$  ( $u''$  polynôme de degré deux en  $u'$ ) pourrait laisser espérer une paire de Lax encore plus simple, dont les résidus seraient des polynômes de degré un en  $u'$ , mais le calcul montre qu'il n'en est rien.

Les quatre éléments non diagonaux  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  de (14) et de (16) ont chacun un seul zéro  $t = f(u', u, x)$  (à condition de choisir  $a = \pm\theta_\infty$  dans (14)), ces quatre zéros sont chacun solution d'une équation  $P_{VI}$  et ils sont donc reliés entre eux par des transformations birationnelles, comme schématisé dans [9, Eq. (4.4)]. Le plus simple de ces éléments est

$$(14) : M_{12} = \frac{t-u}{t(t-1)}. \tag{18}$$

L'élimination d'une des deux composantes de  $\sigma$ , que ce soit dans (14) ou dans (16), engendre donc bien l'unique singularité apparente ( $t = u$  dans l'exemple ci-dessus,  $t =$  une autre fonction  $P_{VI}$  dans les trois autres cas) que possède la paire de Lax scalaire classique [7].

Enfin, la confluence classique [13] de  $P_{VI}$  vers les cinq autres équations de Painlevé définit des paires de Lax tout aussi symétriques, dont certaines apparemment nouvelles.

### Remerciements

C'est un plaisir de remercier l'Unité mixte internationale UMI 3457 du Centre de recherches mathématiques de l'université de Montréal pour son soutien financier.

### Références

[1] A.I. Bobenko, U. Eitner, A.V. Kitaev, Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painlevé equations, *Geom. Dedic.* 68 (1997) 187–227.  
 [2] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Deuxième partie: Détermination de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, *J. Éc. Polytech. Math.* 42 (1867) 1–151, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433698b/f5.image>.

- [3] J. Chazy, Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, *Acta Math.* 34 (1911) 317–385.
- [4] R. Conte, On the Lax pairs of the sixth Painlevé equation, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B2* (2007) 21–27, arXiv:nlin.SI/0701049.
- [5] R. Conte, A.M. Grundland, Reductions of Gauss–Codazzi equations, *Stud. Appl. Math.* 137 (2016) 306–327, <http://dx.doi.org/10.1111/sapm.12121>.
- [6] R. Conte, M. Musette, *The Painlevé Handbook*, Springer, Berlin, 2008; Russian translation: *Метод Пенлеве и его приложения (Regular and Chaotic Dynamics, Moscow, 2011)*.
- [7] R. Fuchs, Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 141 (1905) 555–558.
- [8] M. Jimbo, T. Miwa, Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, *Physica D* 2 (1981) 407–448.
- [9] R. Lin, R. Conte, M. Musette, On the Lax pairs of the continuous and discrete sixth Painlevé equations, *J. Nonlinear Math. Phys.* 10 (Supp. 2) (2003) 107–118, [http://www.sm.luth.se/~norbert/home\\_journal/10s2\\_9.pdf](http://www.sm.luth.se/~norbert/home_journal/10s2_9.pdf) and .ps.
- [10] G. Mahoux, Introduction to the theory of isomonodromic deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients, in: R. Conte (Ed.), *The Painlevé Property, One Century Later*, in: CRM Series in Mathematical Physics, Springer, New York, 1999, pp. 35–76.
- [11] J. Malmquist, Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, *Ark. Mat. Astron. Fys.* 17 (1922/1923) 1–89.
- [12] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations, II. Differential equations satisfied by polynomial Hamiltonians, *Proc. Jpn. Acad., Ser. A* 56 (1980) 367–371.
- [13] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 143 (1906) 1111–1117.
- [14] L. Schlesinger, Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten, *J. Reine Angew. Math.* 141 (1912) 96–145.
- [15] B.A. Springborn, Bonnet pairs in the 3-sphere, *Contemp. Math.* 308 (2002) 297–303.